

Revista EDUCATECONCIENCIA.  
Volumen 29, No. 31  
CD-ISSN: 2007-6347  
E- ISSN: 2683-2836  
Periodo: Abril- junio 2021  
Tepic, Nayarit. México  
Pp. 8 – 38  
DOI: <https://doi.org/10.58299/edu.v29i31.405>

Recibido: 04 de febrero 2021  
Aprobado: 16 de abril 2021  
Publicado: 20 de junio 2021

**Propuesta didáctica para el cálculo de áreas entre dos curvas con el apoyo de GeoGebra**

**Didactic proposal for calculation of areas between two curves with the support of GeoGebra**

**Juan Carlos Corona Sánchez**  
Universidad de Guadalajara, México  
[calingas56@hotmail.com](mailto:calingas56@hotmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0002-0778-4325>

**José Francisco Villalpando Becerra**  
Universidad de Guadalajara, México  
[francisco.villalpando@academicos.udg.mx](mailto:francisco.villalpando@academicos.udg.mx)  
<https://orcid.org/0000-0003-3226-7247>

**Guadalupe Vera Soria**  
Universidad de Guadalajara, México  
[guadalupe.vera@academicos.udg.mx](mailto:guadalupe.vera@academicos.udg.mx)  
<https://orcid.org/0000-0001-8294-6585>

## **Propuesta didáctica para el cálculo de áreas entre dos curvas con el apoyo de GeoGebra**

### **Didactic proposal for calculation of areas between two curves with the support of GeoGebra**

**Juan Carlos Corona Sánchez**  
*Universidad de Guadalajara, México*  
*calingas56@hotmail.com*

**José Francisco Villalpando Becerra**  
*Universidad de Guadalajara, México*  
*francisco.villalpando@academicos.udg.mx*

**Guadalupe Vera Soria**  
*Universidad de Guadalajara, México*  
*guadalupe.vera@academicos.udg.mx*

#### **Resumen**

El problema de investigación está relacionado con el aprendizaje del tema del cálculo de área entre dos curvas con apoyo de GeoGebra. Esta investigación fue de tipo cuasi-experimental, ya que se trabajó con dos grupos previamente establecidos, denominados de control y experimental, respectivamente. El objetivo fue el de determinar el efecto que produce la aplicación de una propuesta didáctica, basada en el marco teórico de las representaciones semióticas de Duval que incluye el uso GeoGebra, sobre los resultados de aprendizaje de los estudiantes. Fue una investigación de tipo cuantitativo al comparar los resultados de aprendizaje por medio de un postest y de una encuesta de opinión aplicada a los alumnos del grupo experimental. De acuerdo con los resultados del análisis estadístico, se concluye que con la aplicación de la propuesta didáctica los alumnos del grupo experimental obtuvieron estadísticamente mejores resultados de aprendizaje que los del grupo control.

**Palabras clave:** Aprendizaje, Cálculo de áreas, GeoGebra, representaciones semióticas.

#### **Abstract**

The research problem is related to learning the topic of calculating the area between two curves with the support of GeoGebra. This research was quasi-experimental, since it worked with two previously established groups, called control and experimental, respectively. The objective was to determine the effect produced by the application of a didactic proposal, based on the theoretical framework of Duval's semiotic representations that includes the use of GeoGebra, on the results of student learning. It was a quantitative research by comparing the learning results by means of a post-test and an opinion survey applied to the students of the experimental group. According to the results of the statistical analysis, it is concluded that with the application of the didactic proposal the students of the experimental group obtained better learning results than those of the control group.

**Keywords:** Learning, calculation of areas, GeoGebra, semiotic representations.

## **Introducción**

### **Situación problemática**

En época reciente, el desarrollo tecnológico ha mostrado avances considerables, algunos de sus adelantos han repercutido en la educación y se han transformado en un instrumento que apoya tanto alumnos como docentes. Con tales avances es posible acceder a herramientas digitales especializadas, muchas de ellas de precio bajo, como lo es el software libre, el cual hace posible experimentar, de una manera rápida, aquellos temas que involucren problemas ya sea de forma gráfica o analítica, además de efectuar cálculos que de forma tradicional serían muy pesados.

El uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) brindan un papel importante en el desarrollo educativo, ya que hace posible utilizar diversas estrategias con las cuales se pueden establecer nuevas maneras tanto de enseñar como de aprender.

Para esta investigación se usó como referencia los registros de representación semiótica de Duval (Duval, 1998) y su relevancia en el aprendizaje, aplicando las transformaciones de la representación dentro del mismo registro (tratamiento) y la conversión que es el cambio entre representaciones semióticas (Penalva & Torregrosa, 2017). Uno de los principales resultados obtenidos fue que los alumnos lograron identificar diferentes formas de representación y transitar a través de ellas, lo cual favoreció la conceptualización de los conceptos relacionados.

En cuanto a la parte del tema de la enseñanza de la integral definida de una variable, que es dónde se muestra el cálculo de área entre dos curvas, Contreras y Ordóñez (2006) afirman que las investigaciones relacionadas dicho tema han estado asociadas a dos factores fundamentales: el análisis de las dificultades de comprensión de los alumnos de los conceptos, donde tiene una gran implicación el objeto matemático de límite, y por otra, el sesgo en cuanto al uso de la integral definida hacia una cierta exclusividad de la algoritmización en el cálculo, esto ha conducido a un sentido algebraico del concepto muy lejano de su interpretación como resultado de los procesos de cambio.

Al respecto Artigue (2002) menciona las limitaciones al realizar una investigación considerando acercamientos estadísticos y la importancia de realizar estudios cuantitativos en didáctica de las matemáticas. Por tal motivo, la metodología de la presente investigación fue de tipo cuantitativa como resultado de la misma.

## **Antecedentes**

### ***Representaciones semióticas de Duval***

El tratamiento y la conversión de registros de representación son actividades fundamentales para la comprensión de los objetos matemáticos, por lo que, para el aprendizaje del cálculo de área entre dos curvas se usó como referencia teórica los registros de representaciones semióticas de Duval.

La tesis principal que caracteriza al modelo de sistemas semióticos de representación de Duval (2003), establece que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto matemático de su representación.

La representación de un concepto es la más elemental de las funciones cognitivas originadas en la actividad matemática, por lo que, en la construcción de un concepto matemático, además de la representación, es necesario realizar un tratamiento del objeto dentro de un mismo registro (por ejemplo, entre distintas formas algebraicas), y adicionalmente lograr la conversión entre los diferentes registros, considerada como actividad fundamental en la adquisición de un concepto. La mediación de diferentes registros semióticos no sólo es necesaria para expresar una idea matemática, sino que son parte constitutiva de ella (Duval, 2006).

En el marco teórico de Duval, se definen las representaciones semióticas como producciones hechas por el uso de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y funcionamiento (Duval, 2003). Se afirma que las representaciones semióticas son absolutamente necesarias para la actividad matemática, porque sus objetos no pueden percibirse directamente y por lo tanto deben ser representados.

Las representaciones semióticas tienen un papel fundamental en el estudio de las matemáticas, ya que, a diferencia de otras áreas de estudio, los objetos matemáticos no son

tangibles y son difíciles de visualizar, esto hace que a través de estas representaciones el concepto se haga accesible. De acuerdo a Duval (2003) es importante que el estudiante diferencie el objeto matemático de sus representaciones, ya que de otra manera no es posible que lo conceptualice.

Duval (2003, p. 3) sostiene que “en matemáticas, las representaciones semióticas no sólo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son esenciales para el desarrollo de la actividad matemática misma”; y hace una diferencia entre la semiosis que es la producción mental de una representación y la noesis que es la comprensión conceptual de un objeto, además de mantener el supuesto de que son inseparables ya que para él no hay noesis sin semiosis.

Duval (2006) distingue tres tipos de actividades cognitivas ligadas a la semiosis:

- 1) La *formación* de una representación que puede ser identificada como perteneciente a un registro determinado. Las representaciones de un registro semiótico particular, deben cumplir con unas reglas de conformidad, por razones de comunicación de representaciones llamada formación de conceptos.
- 2) El procesamiento o *tratamiento* que es la transformación de una representación en el mismo registro donde fue creado. Se denomina tratamiento de una representación, a las transformaciones de la representación dentro del mismo registro. se forma de acuerdo con unas las reglas que le son propias al sistema; de modo que a partir de éstas se obtengan otras representaciones que puedan constituirse como una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Debido a esto, cada tratamiento requiere el reconocimiento y aplicación de las reglas propias a cada registro. En el caso particular de la propuesta, la operación mental de tratamiento se lleva a cabo, por ejemplo, en el ejercicio 6 del cuaderno de trabajo, cuando se calcula el área mediante un procedimiento algebraico dada una integral iterada determinada.
- 3) La *conversión* de una representación semiótica de un registro a otro. Se denomina conversión a la habilidad para cambiar las representaciones producidas de un sistema de representación a otro, de manera que este otro sistema permita explicitar otras

significaciones relativas a aquello que es representado (Ospina, 2017). Por ejemplo, transitar de una representación algebraica a geométrica, es decir, graficar una ecuación.

Además, Duval (2006) señala que la importancia de la conversión describiéndola como un pasaje necesario para la coordinación entre registros de un mismo concepto. La posibilidad de conversión entre registros de representación semiótica es una condición esencial para la conceptualización y, por tanto, de la comprensión conceptual de un objeto (noesis).

Mientras que las representaciones mentales están conformadas por el conjunto de concepciones que un individuo tiene acerca de un objeto matemático, las representaciones semióticas son las producciones constituidas por el empleo de signos, son el medio para exteriorizar las representaciones mentales.

Para Duval (2003), la importancia del empleo de diferentes registros de representación en la comprensión de un concepto es:

- La economía de tratamiento, ya que puede suceder que las relaciones entre los objetos matemáticos pueden representarse de manera más rápida y más simple en alguno de los registros.
- La complementariedad de los registros, pues los aspectos del contenido de una situación, no son los mismos de un registro a otro en que se representen.
- Y la conceptualización, implicada en la coordinación de registros de representación.

Por último, desde la perspectiva del modelo teórico de Duval, la adquisición de los conceptos matemáticos en un individuo se dará en el momento en el que haya una coordinación libre de contradicciones en, por lo menos, dos diferentes registros de representación semiótica del objeto. Al analizar el uso de los registros de representación semiótica, se deben tener en cuenta el reconocimiento del registro, las transformaciones en el interior de éste (tratamiento) y la conversión entre ellos (Duval, 1998).

En esta investigación se consideraron esencialmente los registros de representación gráfico y algebraico. En el registro de representación gráfico, el estudiante elabora figuras

geométricas o dibuja regiones en un sistema de coordenadas cartesianas en la comprensión del cálculo de áreas con o sin ayuda de GeoGebra. Por otra parte, en el registro de representación algebraico, el estudiante opera y resuelve integrales definidas y plantea desigualdades para referir y efectuar el cálculo de área entre dos curvas.

## **Objetivo**

La investigación se realizó con alumnos del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) del tercer semestre de la carrera de Mecánica Eléctrica, cuyo objetivo fue el de determinar el efecto que produce la aplicación de una propuesta didáctica, basada en el marco teórico de las representaciones semióticas de Duval, la cual incluye el uso de GeoGebra (Hohenwarter, 2015), sobre los resultados de aprendizaje de los estudiantes en el tema de área entre dos curvas.

Por lo antes dicho, el problema de investigación está relacionado con el aprendizaje del tema del cálculo de área entre dos curvas con apoyo del software libre GeoGebra.

Además, la investigación se enfocó en dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

¿Cómo influye la propuesta didáctica de cálculo de áreas entre dos curvas con el apoyo del software GeoGebra sobre los resultados de aprendizaje de los estudiantes?

¿Cómo influyen las actividades del cuaderno de trabajo, diseñadas para el aprendizaje del tema de cálculo de áreas entre dos curvas, sobre los resultados del aprendizaje del tema?

¿Cómo son los resultados de aprendizaje en el tema de cálculo de áreas entre dos curvas del grupo de experimental, en comparación con el grupo de control?

¿Qué opinan los estudiantes sobre el uso de la propuesta didáctica en el tema de cálculo de áreas entre dos curvas y el apoyo del profesor?

Los temas abordados en la propuesta didáctica son parte del contenido temático oficial del programa de la asignatura de cálculo avanzado. Estos temas son vistos en la unidad 4

Integrales Múltiples, en particular en los temas 4.1 Integrales iteradas y 4.2 Integrales sobre regiones planas.

## **Materiales y método**

### **Participantes**

La experimentación se llevó a cabo con dos grupos de estudiantes de tercer semestre de la carrera de Ingeniería Mecánica Eléctrica en la asignatura MT113 Cálculo Avanzado, en cuyo programa se incluye el tema de la integral definida y en particular el del cálculo de área entre dos curvas. A uno de los grupos se le denominó grupo de control y al otro grupo experimental, el de control estuvo conformado por 39 alumnos, mientras que el experimental por 32 estudiantes.

Cada grupo fue atendido por el profesor titular asignado a cada uno de ellos. El grupo de control trabajó de manera tradicional, es decir, utilizó solamente los recursos convencionales como pizarrón blanco y marcador; mientras que al experimental se le aplicó la propuesta didáctica del tema de cálculo de área entre dos curvas, basada en el marco teórico de las representaciones semióticas de Duval que incluye el uso GeoGebra.

### **Técnica e instrumentos**

Para realizar la investigación, se revisaron los antecedentes del tema y se elaboraron diferentes materiales.

Se elaboró un cuaderno de trabajo con actividades de aprendizaje con base en el modelo teórico de las representaciones semióticas de Duval, en el que además se incluyeron algunos ejercicios en los que se utilizaron las TIC, particularmente con apoyo del programa GeoGebra para que los estudiantes pudieran definir los límites de integración de regiones limitadas por algunas gráficas en  $R^2$ . El cuaderno de trabajo se aplicó exclusivamente al grupo experimental.

Posteriormente, se realizó un posttest, el cual se describe en el apartado correspondiente, de acuerdo a los contenidos y objetivos de la asignatura de Cálculo Avanzado, respecto al tema de cálculo de área entre dos curvas y se aplicó este instrumento a los dos grupos para medir el

efecto del tratamiento en el grupo experimental en comparación con los resultados del grupo control.

Otro instrumento que se aplicó al grupo experimental fue una encuesta de opinión, que contiene preguntas sobre las consideraciones de los estudiantes respecto al desarrollo de las actividades en el cuaderno de trabajo, el uso del programa GeoGebra, el desempeño del profesor y también una sección para comentarios y sugerencias.

### ***Cuaderno de trabajo***

Fue el instrumento que contenía las actividades de aprendizaje de la propuesta didáctica, el cual se contestó de forma individual por parte de los alumnos del grupo experimental y la elaboración de la secuencia de actividades se fundamentó en el modelo teórico de las representaciones semióticas de Duval, con apoyo de GeoGebra. El mismo consta de nueve actividades los cuales se describen a continuación:

1. Dada las funciones trazar regiones de área.
2. Uso de GeoGebra.
3. Dada las gráficas determinar los límites de integración verticalmente simple.
4. Dada las gráficas determinar los límites de integración horizontalmente simple.
5. Dados los límites de integración de una región  $R$  plantear la integral iterada que calcula el área.
6. Determinación del área dada una integral iterada.
7. Dada las gráficas del área de la región y sus funciones definir límites de integración y plantear la integral iterada.
8. Dadas las regiones entre dos curvas, en sus representaciones gráfica y algebraica, calcular el área en alguno de los dos órdenes de integración.
9. Cambiar el orden de integración de una integral iterada.

Para guiar la enseñanza del tema de cálculo de áreas entre dos curvas, se entregó a cada uno de los estudiantes un ejemplar del cuaderno de trabajo, que contiene definiciones y ejercicios en los registros de representación gráfico y algebraico, algunos ejemplos resueltos con

procedimientos, así como ejercicios de práctica no resueltos para desarrollarse dentro y fuera del aula.

Además, el cuaderno de trabajo se utilizó como material instruccional para guiar a los estudiantes con el fin de llevar a cabo una secuencia que les permitiera:

1. representar un área o región en alguno de los registros de representación semiótica (formación) y
2. relacionar distintas representaciones en un mismo registro (tratamiento) o
3. de un registro a otro (conversión).

Para esto, en distintas actividades se incorporó el uso del programa GeoGebra como apoyo para representar el área de una región de integración. Cabe mencionar, que el programa cuenta con distintas versiones y los estudiantes pudieron elegir utilizarlo ya sea en su computadora o en un celular.

### ***Postest***

El propósito del postest fue evaluar el resultado de aprendizaje de los alumnos sobre el tema de cálculo de área entre dos curvas. Este instrumento constó de siete ejercicios donde se solicitó lo siguiente:

1. Plantear la integral iterada que calcule el área de la región comprendida entre las gráficas.
2. Dibujar el área de las ecuaciones y plantear la integral iterada.
3. Dada las ecuaciones y su gráfica plantear y resolver la integral iterada.
4. Dada las ecuaciones calcular el área de la región.
5. Dadas las ecuaciones graficar, plantear y resolver la integral iterada.
6. Cambiar el orden de integración de la integral iterada.
7. Cambiar el orden de integración de la integral iterada y trazar su región de área.

En la figura 1 se muestran los primeros tres ejercicios, mientras que en la figura 2 se presentan los restantes.

Figura 1.

*Primera parte del postest.*

**Postest** 11  
**Cálculo de áreas**

Nombre: \_\_\_\_\_

1. Plantear una integral iterada que calcule el área de la región comprendida entre las gráficas de las ecuaciones  $x^2 + y^2 = 2$ ,  $y = x^2$  y  $y = 0$ , en el primer cuadrante.

1 Pto

$x = \sqrt{2 - y^2}$     $x = \sqrt{y}$

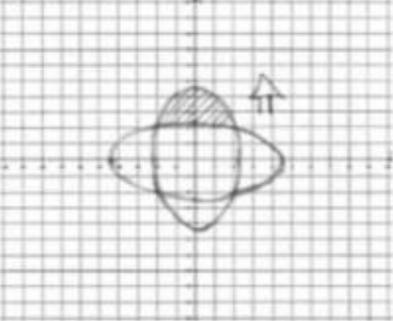


a)  $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{y}} dx dy$    b)  $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dy dx$    c)  $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} dx dy$    d)  $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2-y^2}}^{x^2} dy dx$

2. Plantear una integral iterada que calcule el área interior a  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{25} = 1$  y superior a  $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ . Trazar la región y justifica tu respuesta.

2 Pts

$y = \sqrt{20 - 4x}$     $y = \sqrt{5 - \frac{x^2}{4}}$

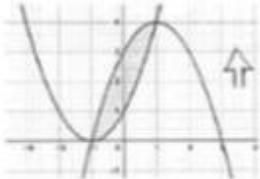


$\int_{-2}^2 \int_{\sqrt{5 - \frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{20 - 4x}} dy dx$

Integral: \_\_\_\_\_

3. Utiliza una integral doble para calcular el área de la región comprendida entre las ecuaciones  $y = -(x-1)^2 + 4$  y  $y = (x+1)^2$ . Justifica tu respuesta.

2 Pts



$\int_{-1}^1 \int_{(x+1)^2}^{-(x-1)^2+4} dy dx$

$\int_{(x+1)^2}^{-(x-1)^2+4} dy = y \Big|_{(x+1)^2}^{-(x-1)^2+4} = [-x^2 + 2x + 3] - [x^2 + 2x + 1]$

$= -x^2 + 2x + 3 - x^2 - 2x - 1 = -2x^2 + 2$

$\int_{-1}^1 -2x^2 + 2 dx = -\frac{2}{3}x^3 + 2x \Big|_{-1}^1$

Área:  $\frac{8}{3} \approx 2.6667$

$[(x+1)(x+1) = x^2 + 2x + 1]$

$-(x-1)(x-1) + 4 = -(x^2 - 2x + 1) + 4$

$= -x^2 + 2x - 1 + 4$

$= -x^2 + 2x + 3$

$[\frac{2}{3} + 2] - [-\frac{2}{3} - 2] = [\frac{4}{3}] - [-\frac{4}{3}] = \frac{8}{3} \approx 2.667$

Fuente: Imagen escaneada de un examen.

Figura 2.

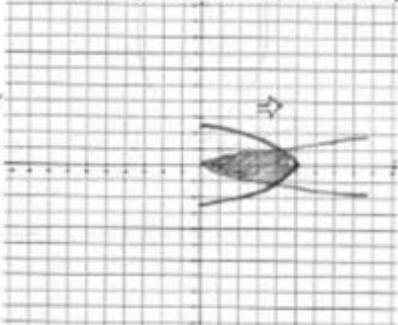
Ejercicios restantes del postest.

$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{x^2+1} dy dx = \frac{2}{3}$

4. Calcular el área de la región comprendida entre las ecuaciones  $y = x^2 + 1$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$ .

a) 2      b)  $\frac{5}{6}$       c)  $\frac{4}{3}$       d)  $\frac{2}{3}$       e) No tiene solución

5. Traza la región acotada por las ecuaciones  $x = -y^2 + 5$  y  $x = 4y^2$ . Expresa el área de la región como una integral doble iterada y evalúa la integral para definir el área. Justifica tu respuesta.



Integral:  $\int_{-1}^1 \int_{4y^2}^{-y^2+5} dx dy$

$\int_{4y^2}^{-y^2+5} dx = x \Big|_{4y^2}^{-y^2+5} = -y^2 + 5 - 4y^2$

$\int_{-1}^1 (-y^2 + 5 - 4y^2) dy = \int_{-1}^1 (-5y^2 + 5) dy = \left[ -\frac{5}{3}y^3 + 5y \right]_{-1}^1$

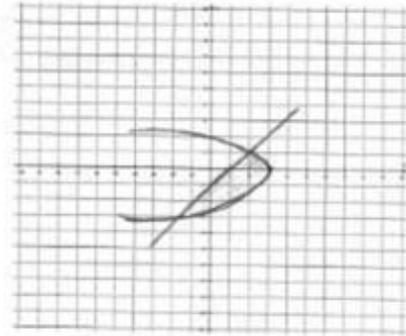
$= \left[ -\frac{5}{3} + 5 \right] - \left[ -\frac{5}{3} - 5 \right] = \left[ \frac{10}{3} \right] - \left[ -\frac{20}{3} \right] = \frac{30}{3} = 10$

Integral:  $\int_{-1}^1 \int_{4y^2}^{-y^2+5} dx dy$  Área:  $\frac{22}{3} \approx 7.333$

6. Cambia el orden de integración de la integral  $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy dx$

a)  $\int_0^2 \int_y^4 dx dy$       b)  $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{y}} dx dy$       c)  $\int_0^2 \int_y^4 dx dy$       d)  $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} dx dy$       e)  $\int_0^2 \int_0^{y^2} dx dy$

7. Cambia el orden de integración de la integral  $\int_{-2}^1 \int_{y+1}^{3-y^2} dx dy$ . Traza la región de integración y justifica tu respuesta.



Integral:  $\int_{-1}^2 \int_{\sqrt{3-x}}^{x-1} dy dx + \int_2^3 \int_{x-1}^{\sqrt{3-x}} dy dx$

Integral: \_\_\_\_\_

$x = 3 - y^2$        $y = \pm\sqrt{3-x}$   
 $x = y + 1$        $y = x - 1$

Fuente: Imagen escaneada de un examen.

### Encuesta de opinión

Al finalizar el postest se aplicó al grupo experimental una encuesta de opinión (ver anexo 1). La medición de la misma se realizó mediante una escala de Likert y se diseñó con la finalidad de conocer la opinión de los estudiantes respecto el desarrollo de las actividades en el cuaderno de trabajo, el uso del programa GeoGebra, el desempeño del profesor y también una sección para comentarios y sugerencias. Los valores y criterios de la escala Likert para la encuesta de opinión se muestra en la tabla 1, mientras que las preguntas se presentan en la tabla 2.

Tabla 1.

*Valores y criterios para las respuestas a las preguntas.*

Valor	1	2	3	4	5
Criterio	Completamente en desacuerdo	En desacuerdo	Me es indiferente	De acuerdo	Completamente de acuerdo

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 2.

*Preguntas de la encuesta de opinión.*

Núm.	Pregunta
1	Se mejoró la visión del tema con el desarrollo de las actividades.
2	Las actividades realizadas fueron interesantes.
3	El uso de la tecnología motiva el interés hacia el aprendizaje del tema.
4	El empleo de los programas facilita la interpretación de gráficas.
5	El tiempo dedicado a las actividades consideras que fue suficiente.
6	Consideras que la metodología empleada en cada una de las sesiones fue la adecuada.
7	Me agrado realizar las actividades del cuaderno de trabajo.
8	Las instrucciones del cuaderno de trabajo fueron claras y comprensibles.
9	El uso del cuaderno de trabajo fue claro y estructurado.
10	Las actividades realizadas fomentaron el aprendizaje del tema.
11	Con las actividades se cubrió el tema de acuerdo al contenido temático.
12	El apoyo brindado por el profesor fue adecuado.
13	Las instrucciones dadas por el profesor fueron claras.
14	El desempeño del profesor para el desarrollo del tema fue el adecuado.
15	El profesor logró desarrollar un ambiente de trabajo positivo (respeto, apertura al diálogo, realimentación).
16	Consideras que, en general, el material utilizado para el tema fue de calidad.

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, la sección de comentarios y sugerencias consistió de tres preguntas abiertas:

- De lo aprendido en la clase del tema de cálculo de áreas entre dos curvas, ¿qué aspectos llamaron más tu atención?
- En general, da tu opinión sobre las actividades realizadas, el uso del software y el desempeño de los profesores.
- Escribir algún comentario que no esté contemplado en las preguntas anteriores y que esté en relación a la calidad del material utilizado o a la forma en que se presentó o utilizó el mismo.

### Procedimiento

La experimentación tuvo una duración de 8 horas, repartidas en cuatro sesiones de dos horas cada una. En la tabla 3 se describe de una forma breve las actividades realizadas en cada sesión.

Tabla 3.

*Sesiones y actividades de la fase experimental.*

Sesión	Hrs	Descripción
1	2	En esta sesión se entregó el cuaderno de trabajo de forma impresa a los alumnos que iban a participar en el experimento. Enseguida se analizó el contenido del mismo y se dieron las instrucciones correspondientes para responderlo de forma adecuada. Finalmente, se solicitó a los alumnos que en la siguiente sesión trajeran una computadora o celular para proporcionarles los archivos necesarios para la experimentación.
2	2	En la primera media hora se entregaron los archivos de GeoGebra que serían utilizados en la experimentación. En el tiempo restante, se dió inicio a la resolución de las actividades propuestas en el cuaderno de trabajo de forma verbal apoyándose de forma visual con los archivos elaborados en GeoGebra. En esta sesión se abarcaron las primeras cuatro actividades, de un total de nueve, del cuaderno de trabajo.
3	2	En esta sesión se completaron las cinco actividades restantes del cuaderno de trabajo.
4	2	En la primera hora y media se aplicó el postest y en la media hora restante se contestó la encuesta de opinión por parte de los estudiantes.

Fuente: Elaboración propia.

## Resultados y discusiones

### Análisis de los resultados de aprendizaje logrado por los alumnos

Las preguntas del postest se presentaron en un formato diseñado para que el estudiante completara o contestara los cuestionamientos solicitados. Cada pregunta se evaluó con los criterios como se muestran en la tabla 4.

Tabla 4.

*Criterios de evaluación del postest.*

Pregunta	Criterio	Evaluación
1	Planteamiento de integral	1 punto si es correcta. 0 puntos incorrecta.
2	Dibujar el área de las ecuaciones y plantear una integral iterada	2 puntos solución correcta 1 punto solución incompleta 0 puntos solución incorrecta
3	Graficar, plantear y resolver una integral iterada	2 puntos solución correcta 1 punto solución incompleta 0 puntos solución incorrecta
4	Calcular el área de una región	1 punto si es correcta. 0 puntos incorrecta.
5	Graficar, plantear y resolver una integral iterada.	2 puntos solución correcta 1 punto solución incompleta 0 puntos solución incorrecta
6	Cambiar el orden de integración de una integral iterada	1 punto si es correcta. 0 puntos incorrecta.
7	Cambiar el orden de integración de una integral y trazar su región de área	2 puntos solución correcta 1 punto solución incompleta 0 puntos solución incorrecta

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 5 se muestran los datos de los resultados de las respuestas de los estudiantes en el postest al grupo control y en la tabla 6 los correspondientes al grupo experimental.

Tabla 5.

*Resultados del postest correspondientes al grupo control.*

Alumno	Pregunta							Prom
	1	2	3	4	5	6	7	
1	0	0	0	0	0	0	0	0.00
2	1	2	1	1	2	1	1	81.82
3	1	2	1	1	2	0	0	63.64
4	1	2	2	1	2	0	2	90.91
5	0	0	0	0	0	0	0	0.00
6	1	1	2	0	2	0	2	72.73
7	1	0	0	1	1	0	1	36.36
8	1	0	0	0	2	1	0	36.36
9	1	2	2	1	2	1	1	90.91
10	1	1	2	1	2	1	2	90.91
11	0	0	2	1	0	1	0	36.36
12	1	2	1	0	2	1	2	81.82
13	1	2	2	1	1	1	2	90.91
14	1	1	0	1	2	1	1	63.64
15	0	1	2	1	1	1	1	63.64
16	1	0	1	0	1	1	2	54.55
17	1	2	1	1	2	0	1	72.73
18	1	2	2	1	2	1	2	100.00
19	1	0	1	1	1	1	2	63.64
20	1	0	1	1	1	0	0	36.36
21	1	0	1	1	1	1	2	63.64
22	1	0	0	1	1	0	1	36.36
23	1	0	2	0	2	0	0	45.45
24	1	1	0	1	1	1	2	63.64
25	1	0	0	1	0	0	0	18.18
26	0	1	1	1	2	1	1	63.64
27	1	0	1	1	2	1	1	63.64
28	1	2	2	1	1	1	2	90.91
29	1	1	2	0	2	1	2	81.82
30	1	0	2	1	2	0	0	54.55
31	1	1	0	0	0	1	0	27.27

32	1	0	2	1	1	1	2	72.73
	84.38	40.63	56.25	71.88	69.35	62.50	54.69	63.64

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 6.

*Resultados del postest correspondientes al grupo experimental.*

Alumno	Pregunta							Prom.
	1	2	3	4	5	6	7	
1	1	2	2	1	2	1	0	81.82
2	1	2	2	1	2	1	2	100.00
3	0	2	2	1	2	1	2	90.91
4	1	2	2	1	2	1	1	90.91
5	1	0	2	1	2	1	1	72.73
6	1	2	2	1	2	1	2	100.00
7	1	2	2	1	2	1	2	100.00
8	1	2	2	1	2	0	2	90.91
9	1	2	2	1	2	1	1	90.91
10	1	1	2	1	2	1	2	90.91
11	1	2	2	1	2	1	1	90.91
12	1	2	1	1	2	1	1	81.82
13	1	2	2	1	2	1	1	90.91
14	1	0	2	1	2	0	1	63.64
15	1	2	2	1	2	1	2	100.00
16	1	2	1	1	2	1	1	81.82
17	1	2	2	1	2	0	2	90.91
18	1	2	2	1	2	1	1	90.91
19	1	0	2	1	2	1	1	72.73
20	1	2	2	1	2	0	2	90.91
21	1	2	2	1	2	1	2	100.00
22	1	2	1	1	2	1	2	90.91
23	1	1	2	1	1	1	1	72.73
24	1	2	2	1	2	1	2	100.00
25	1	2	2	1	2	1	2	100.00
26	1	2	2	1	2	1	2	100.00
27	1	2	2	1	2	1	2	100.00
28	0	0	1	1	1	1	0	36.36
29	1	2	2	1	2	1	2	100.00
30	1	2	2	1	2	1	2	100.00
31	0	2	2	1	2	1	2	90.91

32	0	2	2	1	2	1	2	90.91
33	1	2	2	1	2	1	2	100.00
34	1	1	2	1	2	1	1	81.82
35	0	2	2	0	1	0	1	54.55
36	1	2	2	1	2	1	2	100.00
37	0	2	2	1	1	1	1	72.73
38	1	2	2	1	2	1	2	100.00
39	1	2	2	1	2	1	2	100.00
	84.62	85.90	94.87	97.44	94.87	87.18	76.92	88.35

Fuente: Elaboración propia.

### **Resultados estadísticos del postest**

En la tabla 7 se muestra un resumen estadístico de los resultados de la aplicación del postest de los grupos control y experimental realizado con el software estadístico Statgraphics® (Polhemus, 2014), ya que este presenta los resultados de una forma entendible y no utiliza programación, donde se muestra que el promedio del grupo experimental fue mayor que del grupo control; además dado que los resultados muestran que la desviación estándar, que es una medida de variabilidad del grupo, es menor en el grupo donde se aplicó la propuesta didáctica; se considera que este grupo fue más homogéneo. Cabe mencionar que en el grupo control dos alumnos no presentaron el postest, por lo que no fueron considerados en el análisis estadístico.

Tabla 7.

#### *Resumen estadístico del postest.*

	Grupo Control	Grupo Experimental
Recuento	30	39
Promedio	63.6364	88.345
Desviación Estándar	21.8808	14.1373
Mínimo	18.1818	36.3636
Máximo	100.0	100.0
Rango	81.8182	63.6364

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 8 se puede observar que el intervalo de confianza para la diferencia entre las medias, el cual se extiende desde -33.3875 hasta -16.0297, y puesto que el intervalo no contiene el valor 0, se confirma la existencia de una diferencia estadísticamente significativa entre las medias de las dos muestras, con un nivel de confianza del 95.0%.

Tabla 8.

*Promedios e intervalos de confianza.*

Grupo	Media	Intervalo de confianza 95%
Control	63.63	55.46 – 71.80
Experimental	88.34	83.76 – 92.92
Intervalo de confianza del 95.0% para la diferencia de medias: -33.3875 – -16.0297		

Fuente: Elaboración propia.

Se llevó a cabo una comparación de las medias del grupo control y grupo experimental, con el estadístico de prueba  $t$ -student, con un nivel de significancia  $\alpha = 0.05$ . Dicha prueba fue realizada con el software estadístico Statgraphics® (Polhemus, 2014), para la comparación de las medias, se obtuvo una

$$t = -5.68259$$

a la cual le corresponde un valor de probabilidad

$$P = 0.000000528634$$

que comparado con el valor de  $\alpha = 0.05$ , se tiene que el valor de  $P < \alpha$ , y por lo tanto se rechaza la hipótesis nula respecto a la equivalencia de las medias de los grupos.

Específicamente, la prueba  $t$ -student se usó para evaluar hipótesis acerca de la diferencia entre las medias:

Hipótesis nula: Con el empleo de la propuesta didáctica los resultados de aprendizaje del grupo experimental no son estadísticamente mejores que los resultados de aprendizaje del grupo de control.

$$H_0: \bar{X}_E \leq \bar{X}_C$$

Hipótesis alternativa: Con el empleo de la propuesta didáctica los resultados de aprendizaje del grupo experimental son estadísticamente mejores que los resultados de aprendizaje del grupo de control.

$$H_A: \bar{X}_E > \bar{X}_C$$

Dónde:  $\bar{X}_E, \bar{X}_C$ , representan la media muestral de los grupos experimental y de control respectivamente.

La prueba se construyó para determinar si la diferencia entre las dos medias era igual a 0 contra la hipótesis alterna de que la diferencia no era igual a 0. Puesto que el valor-P calculado fue menor que 0.05, se pudo rechazar la hipótesis nula en favor de la hipótesis alternativa, es decir, que con la aplicación de la propuesta didáctica se obtuvieron mejores resultados de aprendizaje del tema cálculo de área entre dos curvas por parte de los alumnos del grupo experimental, en comparación con el grupo de control que recibió un tratamiento tradicional.

### Análisis de la encuesta de opinión

En la tabla 9 se muestran los porcentajes de ocurrencia en cada una de las preguntas de la encuesta de opinión aplicada al grupo experimental de acuerdo a los criterios establecidos.

Tabla 9.

*Porcentajes de cada pregunta de acuerdo a los criterios establecidos.*

Pregunta	Criterio				
	Completamente de acuerdo	De acuerdo	Me es indiferente	En desacuerdo	Completamente en desacuerdo
1	76.92	15.38	7.69	0.00	0.00
2	61.54	33.33	5.13	0.00	0.00
3	76.92	17.95	2.56	2.56	0.00
4	87.18	12.82	0.00	0.00	0.00
5	56.41	23.08	5.13	12.82	2.56
6	48.72	38.46	12.82	0.00	0.00
7	56.41	41.03	2.56	0.00	0.00
8	53.85	38.46	5.13	2.56	0.00
9	61.54	38.46	0.00	0.00	0.00
10	66.67	28.21	5.13	0.00	0.00
11	69.23	23.08	7.69	0.00	0.00
12	56.41	28.21	12.82	2.56	0.00
13	48.72	41.03	7.69	0.00	2.56

14	61.54	33.33	5.13	0.00	0.00
15	74.36	17.95	5.13	2.56	0.00
16	79.49	20.51	0.00	0.00	0.00

Fuente: Elaboración propia.

Considerando los valores para los criterios establecidos, en la tabla 10 se muestran estos valores para las respuestas a cada una de las preguntas de encuesta de opinión por parte de los alumnos.

Tabla 10.

*Respuestas a las preguntas de opinión en escala Likert.*

Alumno	Pregunta															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	5	4	4	5	5	4	4	4	4	4	5	4	4	4	4	4
2	5	4	4	5	5	4	4	4	5	5	4	5	5	5	5	5
3	5	4	5	5	4	4	4	4	5	5	4	5	4	4	5	5
4	4	4	5	5	4	4	4	4	4	4	5	4	4	4	4	5
5	5	4	4	5	2	4	5	5	5	5	5	3	4	4	3	4
6	4	5	5	5	2	4	4	4	4	4	4	3	4	4	4	4
7	5	4	4	4	4	4	4	4	4	5	4	4	4	4	4	4
8	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
9	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
11	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
12	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
13	4	4	5	4	3	3	4	4	4	4	3	4	3	3	4	4
14	5	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
15	3	4	2	5	5	3	4	4	4	3	5	5	5	4	4	5
16	4	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5
17	5	4	4	5	5	4	4	5	4	5	5	5	4	4	3	4
18	5	5	5	5	5	5	5	5	4	4	5	4	4	4	5	5
19	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
20	5	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	5	5
21	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
22	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	4	5	4	4	5	5
23	5	4	3	5	4	4	3	4	4	5	4	4	4	4	5	5

24	3	3	5	5	1	3	4	3	5	3	3	3	3	4	5	5
25	5	5	5	5	4	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	5
26	5	4	5	5	2	4	4	2	4	5	5	5	5	5	5	5
27	3	5	5	5	3	3	4	3	4	4	3	2	1	3	2	4
28	5	5	5	4	4	5	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
29	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
30	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
31	4	3	5	5	2	3	5	5	5	5	5	5	4	5	5	5
32	5	4	5	5	5	5	5	4	5	5	5	4	4	5	5	5
33	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5
34	5	5	5	5	2	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
35	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	3	4	5	5
36	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
37	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	3	4	5	5	5
38	4	5	5	4	4	4	4	4	4	4	5	4	4	5	5	5
39	5	5	4	5	4	4	4	4	5	4	4	3	4	5	4	4

Fuente: Elaboración propia.

De las respuestas de los alumnos, se observa que más del 90% consideran que con las actividades diseñadas en la propuesta didáctica se mejoró la visión del tema, que las mismas fueron interesantes; se facilitó la interpretación de las gráficas, se motivó y fomentó su interés sobre el aprendizaje del tema, se cubrió el contenido temático, que fue de su agrado realizarlas en un cuaderno de trabajo además de que sus instrucciones y la metodología fueron claras y precisas, además de que el material utilizado fue de calidad.

Cabe señalar que con el uso de la computadora y el celular los alumnos mostraron interés en el tema, pues al ingresar las ecuaciones, lograban visualizar y manipular el área de la región a calcular, y además definir los límites de integración. Los alumnos señalaron que el uso de GeoGebra, además de la rapidez para graficar se facilitó la exploración para interpretar la región de área acotada por las funciones. Además, la estructura de las actividades del cuaderno de trabajo se diseñó conforme al programa de cálculo avanzado. El nivel de dificultad fue de lo simple a lo complejo considerando los diferentes registros de representación semiótica.

Con respecto al tiempo dedicado a las actividades, aproximadamente el 20% de los alumnos consideraron que no les pareció suficiente. En este caso, durante la elaboración de los ejercicios en el cuaderno de trabajo, sí el lapso para completar la actividad programada no les fue suficiente, se les solicitó entregar como tarea en la clase siguiente.

También, más del 90% de los alumnos consideraron que el apoyo y desempeño del profesor fue adecuado, que sus instrucciones fueron claras y que se logró un ambiente de trabajo positivo, aunque a un alumno le pareció que no lo fueron del todo.

Durante la aplicación del experimento, en cada una de las secciones del cuaderno de trabajo, se pretendió indicar con la mayor claridad posible las instrucciones, sin embargo, hubo algunos estudiantes que no las entendieron y se les explicó lo que se solicitaba para completar o resolver el ejercicio y con eso apoyarlos para que se entendiera lo que se pedía, además de que en todo momento se estuvieron atendiendo las dudas que se fueron presentando.

En lo concerniente a la sección de comentarios y sugerencias, las respuestas de los alumnos se resumen a continuación:

- De lo aprendido en la clase del tema de cálculo de áreas entre dos curvas, ¿qué aspectos llamaron más tu atención?

A la mayoría de alumnos les pareció interesante poder comprobar, mediante las representaciones gráficas y algebraicas, que el cálculo de una región plana se puede definir mediante los límites de integración en el orden vertical u horizontalmente simple.

- En general, da tu opinión sobre las actividades realizadas, el uso del software y el desempeño de los profesores.

En cuanto a las actividades comentaron que estuvieron bien planteadas, además de ser interesantes el cálculo de área mediante integrales iteradas. Respecto al uso de GeoGebra, los estudiantes consideraron que les facilitó el aprendizaje del tema, la comprensión y visualización del área que se deseaba calcular. La explicación del instructor apoyó el uso eficiente del cuaderno de trabajo, la interacción con el software GeoGebra, la interpretación de las gráficas y los cálculos de áreas que los estudiantes realizaron.

- Escribe un comentario extra acerca del material impreso (cuaderno de trabajo) utilizado.

La mayoría de los alumnos comentó que les había gustado la metodología de trabajo propuesta en el cuaderno de trabajo, sobre todo con respecto al uso del software, y además sugirieron incluir las soluciones de los ejercicios propuestos.

Se consideró que el empleo del software resultó ser una herramienta rápida y eficaz para que los alumnos se familiarizaran con el tema al relacionar las representaciones algebraicas con las geométricas, y que les ayudó a explorar e interpretar el cálculo del área de las regiones con las que se les planteó trabajar.

### **Respuesta a las preguntas de investigación**

A continuación, se responden las preguntas de investigación a partir del análisis cualitativo y cuantitativo que se llevó a cabo como resultado de la aplicación de la propuesta didáctica para el aprendizaje del tema de área entre dos curvas.

#### ***¿Cómo influye la propuesta didáctica de cálculo de áreas entre dos curvas con el apoyo del software GeoGebra sobre los resultados de aprendizaje de los estudiantes?***

Con base en la interpretación del análisis de los datos, donde se aplicó una evaluación cuantitativa de los resultados del examen posttest, se constató un efecto positivo en el aprendizaje del grupo experimental, a partir de la aplicación de la propuesta didáctica del tema de cálculo de áreas entre dos curvas, lo que se avala por los resultados obtenidos mediante una prueba de hipótesis en la que se contrastaron las medias del grupo control y el grupo experimental.

Se verificó que sí existía una diferencia estadísticamente significativa entre las medias de ambos grupos, al realizar un análisis con el software para estadística Statgraphics® (Polhemus, 2014), en el cual se utilizó el estadístico de prueba  $t$ -student, se obtuvo un valor probabilístico  $P = 0.000000528634$ , menor que el nivel de significancia de  $\alpha = 0.05$ , y por lo tanto fue mejor el aprendizaje del grupo experimental del tema de cálculo de áreas entre dos curvas en comparación al grupo control.

#### ***¿Cómo influyen las actividades del cuaderno de trabajo, diseñadas para el aprendizaje del tema de cálculo entre dos curvas, sobre los resultados del aprendizaje del tema?***

En la encuesta de opinión realizada se encontró que la mayoría de los alumnos (76.92%), afirmaron que las actividades realizadas mejoraron la perspectiva en el tema cálculo de áreas entre dos funciones, el 15.38%, seis estudiantes estuvieron de acuerdo y solo tres alumnos 7.69% les fue indiferente. También, señalaron que el uso del programa GeoGebra, además de conseguir mayor eficiencia para graficar las regiones, facilitó la exploración del orden de integración más

conveniente para el cálculo del área acotada por las funciones. El 66.67% de los estudiantes, es decir, 26 alumnos, estuvo completamente de acuerdo en que las actividades realizadas fomentaron el aprendizaje de los temas expuestos, 11 de ellos (28.21%) de acuerdo y solo a 2 (5.13%) les fue indiferente.

### ***¿Cómo son los resultados de aprendizaje del tema de cálculo entre dos curvas del grupo de experimental, en comparación con el grupo de control?***

Los resultados de aprendizaje del tema de cálculo de área entre dos curvas por parte del grupo experimental fueron estadísticamente mejores en comparación con los del grupo control. A partir de los promedios obtenidos en el postest se pudo verificar con un 95% de confianza, mediante una prueba *t*-student para la comparación de las medias de los grupos, que el valor calculado de  $P = 0.000000528634$  comparado con el valor de significancia de  $\alpha = 0.05$ , que  $P < \alpha$ , y por lo tanto se rechazó la hipótesis nula respecto a que con el empleo de la propuesta didáctica los resultados de aprendizaje del grupo experimental no serían mejores que los resultados de aprendizaje del grupo de control, en favor de la hipótesis alternativa, es decir, en el grupo experimental se obtuvieron mejores resultados de aprendizaje.

Además, se mostró que el grupo experimental fue más homogéneo, dado que su desviación estándar (14.1373) fue menor que el grupo control (21.8808), de hecho mediante una prueba-*F* para evaluar la hipótesis sobre el cociente de las desviaciones estándar era igual a 1.0, en comparación respecto a la hipótesis alternativa de que el cociente no era igual a 1.0, se obtuvo un valor *P* calculado menor que 0.05, por lo que se pudo rechazar la hipótesis nula, comprobando que hubo estadísticamente diferencia significativa entre las desviaciones estándar de los grupos control y experimental.

### ***¿Qué opinan los estudiantes sobre el uso de la propuesta didáctica del tema de cálculo entre dos áreas y el apoyo del profesor?***

Según lo expresado por los alumnos en la encuesta, la mayoría (el 76.92%) se motivó debido al uso de la tecnología para la determinación y el cálculo de áreas entre curvas, 7 estudiantes (17.95%) estuvieron de acuerdo, a un alumno (2.56%) le fue indiferente y otro 2.56% estuvo en desacuerdo.

El 56.41% de los alumnos (22) se entusiasmaron con las actividades correspondientes al cuaderno de trabajo, 16 de los estudiantes (41.03%) manifestaron estar de acuerdo y solo al 2.56% (1) le fue indiferente.

El apoyo ofrecido del profesor fue adecuado para el 56.41% (22) de alumnos que estuvieron completamente de acuerdo, 28.21% (11) de los alumnos estuvieron de acuerdo, 12.82% (5) les fue indiferente y solo el 2.56% (1) en desacuerdo.

La opinión de los alumnos sobre la propuesta en general, es que las actividades estuvieron planteadas claramente, además de considerar que fueron interesantes y que el uso de las TIC facilitó el aprendizaje del tema de cálculo de área entre dos curvas mediante integrales iteradas.

El efecto que produjo la propuesta didáctica basada en las representaciones semióticas de Duval fue positivo en el grupo experimental, porque al realizar las actividades con la guía del cuaderno de trabajo, con sus tareas planificadas y estructuradas, contar con el apoyo de software y realizar las exploraciones gráficas de la funciones que se analizaron, los llevó a realizar las conversiones que les ayudó a visualizar y realizar los correspondientes cálculos; además, fue positivo el apoyo que el docente brindó al aclarar sus dudas en su momento. Los resultados del análisis estadístico confirman lo anterior.

### **Conclusiones**

Con base en los resultados del análisis estadístico, se concluye que existe una diferencia significativa en el aprendizaje del grupo experimental en comparación con el de los estudiantes del grupo de control, los cuales recibieron una instrucción tradicional, es decir que con la aplicación de la propuesta didáctica se obtuvieron mejores resultados de aprendizaje en los estudiantes del grupo experimental del tercer semestre de la Ingeniería Mecánica Eléctrica en la asignatura MT113 Cálculo Avanzado del CUCEI, en el tema cálculo de áreas entre dos curvas.

Para los estudiantes, según lo expresaron en la encuesta de opinión que se les aplicó al final del tratamiento, las actividades relativas al tema de cálculo de área entre dos curvas con el uso del programa GeoGebra resultaron interesantes, lo que propició una buena participación de los alumnos. Cabe señalar que la propuesta se aplicó cuando el curso ya tenía nueve semanas de

haber iniciado, por lo que los estudiantes ya contaban con algunos antecedentes del tema, y al proponer utilizar las TIC se motivaron y accedieron a participar.

El material que se utilizó en la propuesta didáctica ayudó a identificar las diferentes representaciones semióticas de un registro en particular y la conversión de las representaciones producidas de un sistema de representación a otro, como se menciona en Ospina (2017) y Penalva y Torregrosa (2017). Dicho de otra manera, los estudiantes lograron interpretar, explorar y transitar de una representación algebraica a su expresión geométrica.

El modelo de representaciones semióticas de Duval fue un sustento importante en el diseño y desarrollo de la propuesta. En base a la percepción de los alumnos en la encuesta de opinión, se puede decir que la secuencia de indicaciones en el cuaderno de trabajo, que incluyó el uso de tecnología con el fin de promover el aprendizaje de los estudiantes, ayudó a centrar su atención en la relación lógica de las distintas representaciones y a fomentar la discusión sobre los objetos matemáticos que estaban descubriendo.

El tema de cálculo de áreas contiene diversos registros de representación y éstos pueden interpretarse mediante una integral verticalmente simple u horizontalmente simple. A partir del análisis de los datos en el estudio se pudo verificar que la identificación de estas diferentes formas de representación y el tránsito a través de ellas, favoreció la conceptualización por parte de los estudiantes tal como lo afirma Duval (2006).

El uso de la tecnología favoreció la exploración y representación de las áreas para que los estudiantes pudieran:

- 1) Establecer apropiadamente regiones entre determinadas curvas en el plano.
- 2) Plantear desigualdades y definir integrales iteradas asociadas a dichas regiones.
- 3) Obtener el valor del área de la región construida.

Para investigaciones futuras, sería necesario replantear el tiempo de aplicación de la misma, pues fue el único aspecto en el cual varios alumnos, aproximadamente el 20%, consideraron que no les fue suficiente para completar las actividades del cuaderno de trabajo.

Finalmente, a partir de los resultados obtenidos en este trabajo, se puede afirmar que las TIC pueden utilizarse para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos, aunque su uso en el aula requiere de una planeación adecuada. La tecnología ha llegado para transformar positivamente la forma de enseñar y aprender matemáticas.

### Referencias

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274. <https://link.springer.com/article/10.1023/A:1022103903080>
- Contreras, A. & Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 65-84. [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_abstract&pid=S1665-24362006000100004&lng=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1665-24362006000100004&lng=es&nrm=iso)
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y su funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamericano.
- Duval, R. (2003). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.
- Hohenwarter, M. (2015). GeoGebra. (versión 5.0) [software]. Instituto GeoGebra Internacional. <http://geogebra.org>
- Ospina, D. (2017, 4 de abril). *Las Representaciones Semióticas en el Aprendizaje del Concepto Función Lineal*. <http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/245/1/Las%20representaciones%20semi%C3%B3ticas%20en%20el%20aprendizaje%20del%20concepto%20de%20funci%C3%B3n%20lineal.pdf>.
- Penalva, M. & Torregrosa, G. (2017, 4 de abril). *Representación y aprendizaje de las matemáticas*. <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/viewFile/174/309>.
- Polhemus, N. (2014). Statgraphics Centurion. (versión 17) [software]. Statgraphics Technologies, Inc. <https://www.statgraphics.com/>

## Anexo 1

### ENCUESTA DE OPINIÓN SOBRE LAS ACTIVIDADES

**Instrucciones:** Con base en la experiencia durante las sesiones, marca una x el recuadro que corresponda a las siguientes cuestiones. Por favor sea HONESTO ya que la encuesta es anónima. Considerar lo más adecuado a partir del desarrollo de las actividades realizadas.

#### Escala de observación

1	2	3	4	5
Completamente en desacuerdo	En desacuerdo	Me es indiferente	De acuerdo	Completamente de acuerdo

Opiniones					
	1	2	3	4	5
1. Se mejoró la visión del tema con el desarrollo de las					

actividades.					
2. Las actividades realizadas fueron interesantes.					
3. El uso de la tecnología motiva el interés hacia el aprendizaje del tema.					
4. El empleo de los programas facilita la interpretación de gráficas.					
5. El tiempo dedicado a las actividades consideras que fue suficiente.					
6. Consideras que la metodología empleada en cada una de las sesiones fue la adecuada.					
7. Me agrado realizar las actividades del cuaderno de trabajo.					
8. Las instrucciones del cuaderno de trabajo fueron claras y comprensibles.					
9. El uso del cuaderno de trabajo fue claro y estructurado.					
10. Las actividades realizadas fomentaron el aprendizaje del tema.					
11. Con las actividades se cubrió el tema de acuerdo al contenido temático.					
12. El apoyo brindado por el profesor fue adecuado.					
13. Las instrucciones dadas por el profesor fueron claras.					
14. El desempeño del profesor para el desarrollo del tema fue el adecuado.					
15. El profesor logró desarrollar un ambiente de trabajo positivo (respeto, apertura al diálogo, realimentación).					
16. Consideras que, en general, el material utilizado para el tema fue de calidad.					

De lo aprendido en la clase del tema de cálculo de áreas, ¿qué aspectos llamaron más tu atención?

---



---

En general, da tu opinión sobre las actividades realizadas, el uso del software y el desempeño de los profesores.

---



---

**Escribir algún comentario que no esté contemplado en las preguntas anteriores y que esté en relación a la calidad del material utilizado o a la forma en que se presentó o utilizó el mismo**

**GRACIAS POR SU COLABORACIÓN**